Capitolo 1

PROPRIETÀ DEI FLUIDI

1.1 Introduzione

La fluidodinamica è la disciplina che si occupa dello studio dei liquidi e dei gas in quiete od in moto. Le sue applicazioni riguardano problemi diversi che vanno dallo studio del flusso del sangue nei capillari (i quali hanno un diametro di pochi micron) a quello del petrolio in un oleodotto di centinaia di chilometri di lunghezza. I principi della fluidodinamica spiegano perché le ali degli aeroplani sono affusolate e più lisce possibile, mentre le palline da golf sono rugose. La risposta a molte altre interessanti domande può essere ottenuta attraverso l'applicazione di semplici principi della fluidodinamica (ad esempio come usare le informazioni fornite da un modellino di aeroplano per progettarne uno vero; quanto può diminuire il consumo di un'automobile con un migliore progetto aerodinamico, ecc.). Molto spesso, quindi, si deve affrontare la soluzione di problemi che richiedono una buona comprensione degli aspetti fluidodinamici.

La prima domanda a cui rispondere è: cos'è un fluido? O meglio, quale è la differenza tra un solido ed un fluido? L'esperienza ci dice che un solido è "duro" e non facile da deformare mentre un fluido è "morbido" e cambia forma facilmente. Dal punto di vista della struttura molecolare, quello che normalmente pensiamo come solido è caratterizzato da molecole molto ravvicinate tra loro e con forti legami coesivi che permettono al solido di conservare la propria forma. Invece, quello che pensiamo come liquido è caratterizzato da una struttura molecolare ancora molto densa ma con legami più deboli e con molecole più libere di muoversi. Perciò i liquidi possono essere facilmente deformati, ma non compressi, possono essere messi in contenitori o spinti all'interno di tubazioni. I gas sono composti da molecole maggiormente distanziate e libere di muoversi. Quindi possono essere facilmente deformati ed anche compressi ed occupano completamente lo spazio nel contenitore in cui si trovano.

Un fluido si può definire come una sostanza che si deforma in modo continuo quando è sottoposto ad una qualsiasi tensione di taglio, creata, cioè, da una forza che agisce in direzione tangente ad una superficie. Invece, quando un solido viene sottoposto ad una tensione di taglio, questo (finchè si rimane in campo elastico lineare) si deforma soltanto in piccole quantità, senza scorrere ma raggiungendo una configurazione di equilibrio. Alcuni materiali tipo gelatine, vernici, bitume ecc. hanno un comportamento più strano, simile a quello dei solidi se le tensioni a cui sono soggetti sono piccole e simile a quello dei liquidi se sottoposti a tensioni maggiori. Lo studio del comportamento dei materiali si chiama reologia e non viene incluso nell'ambito della fluidodinamica classica.

Nonostante l'importanza della struttura molecolare nel caratterizzare il comportamento di un fluido, risulta troppo complicato studiare il movimento di ogni singola molecola. Si considera invece un valore medio, o macroscopico della grandezza d'interesse, facendo una media su un piccolo volume di fluido che contenga però un grande numero di molecole. Quando si dice, ad esempio, che la velocità in un punto ha un certo valore si considera il valore medio della velocità delle molecole del fluido in un volumetto che comprende il punto in esame. Le dimensioni del volume, che possiamo chiamare *particella fluida*, sono piccole rispetto a quelle fisiche del sistema, ma grandi rispetto alla distanza media intermolecolare. Ad esempio il numero di molecole per mm^3 per l'aria in condizioni normali è $2.7\ 10^{16}$ mentre per i liquidi è dell'ordine di 10^{19}. Ricordiamo a tal proposito che una mole di un gas, cioè una massa di gas in grammi pari al numero che esprime il peso molecolare del gas (ad esempio circa 2 g di idrogeno, oppure 32 g di ossigeno, oppure 29 g di aria) contiene un numero di molecole pari al numero di Avogadro $N_A = 6.023\ 10^{23}$. A temperatura e pressione normali una mole di gas occupa circa 22,4 dm^3.

Il diametro medio delle molecole dell'aria è pari circa a $3.4\ 10^{-7}\ mm$. Considerando le molecole a forma di cubetti, se esse fossero tutte a contatto tra loro, all'interno di un volume di 1 mm^3 ne entrerebbero $2.5\ 10^{19}$. Invece, in base a quanto detto sopra, per l'aria in condizioni normali trovano posto solo $2.7\ 10^{16}$ molecole. Quindi c'è un'enorme quantità di spazio libero (in altre parole il lato lungo 1 mm di un cubetto potrebbe essere ridotto fino a 0,1 mm prima di avere le molecole a contatto, senza tenere conto che il volume occupato dalle sfere è in realtà minore).

L'idea di considerare dei valori medi su dei volumetti di fluido molto piccoli è quindi ragionevole. Assumiamo allora che tutte le grandezze fluidodinamiche d'interesse varino nel fluido in modo continuo trattando cioè il fluido come un mezzo continuo. Questa ipotesi cessa di essere valida in particolare quando: a) si studiano problemi che hanno dimensioni caratteristiche molto piccole, ovvero dello stesso ordine di grandezza di quelle molecolari; b) si studia il moto di un corpo all'interno di un gas rarefatto, in cui la dimensione del corpo è confrontabile con la distanza tra le molecole.

Indichiamo con $\mathbf{v}_i$ la velocità della generica molecola di fluido nel volumetto $\mathcal{V}$ e con m la massa, assunta uguale per ciascuna molecola. La massa totale delle N molecole contenute in $\mathcal{V}$ è:

$$M = \sum_{i=1}^{N} m = N\,m$$

La velocità media del fluido nel volumetto $\mathcal{V}$ al tempo t è:

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m\,\mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \tag{1.1}$$

Quindi $\overline{\mathbf{v}}$ è la velocità con cui si muove il centro di massa delle N molecole contenute in $\mathcal{V}$. Infatti la posizione vettoriale del centro di massa è:

$$\mathbf{r}_{c.m.} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m\,\mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m} \tag{1.2}$$

con $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ vettore posizione di ciascuna molecola. Derivando la (1.2) rispetto al tempo si ottiene $\mathbf{v}_{c.m.} = \overline{\mathbf{v}}$. La velocità di una molecola può essere espressa come somma di due contributi:

$$\mathbf{v_i} = \overline{\mathbf{v}} + \mathbf{u}_i$$

in cui $\mathbf{u_i}$ è la velocità di agitazione termica (la quale ha valore medio nullo: $\overline{\mathbf{u}} = 0$). Per un gas in quiete (macroscopicamente) si ha $\overline{\mathbf{v}} = 0$ ed ogni molecola è dotata unicamente della velocità di agitazione termica.

1.2 Densità

La fluidodinamica utilizza le stesse leggi fondamentali incontrate nello studio della fisica e della meccanica: le leggi del moto di Newton, il principio di conservazione della massa, il primo ed il secondo principio della termodinamica. Pertanto vi sono molti aspetti in comune con la meccanica del corpo rigido e del corpo deformabile.

Prima di affrontare lo studio di questa materia è necessario definire alcune proprietà del fluido necessarie a caratterizzarne il comportamento. E' infatti ovvio che dei fluidi diversi possano avere delle caratteristiche ed un comportamento differenti. Ad esempio i gas sono leggeri e comprimibili mentre i liquidi sono più pesanti e quasi del tutto incomprimibili. Allo stesso modo l'olio fuoriesce da un contenitore più lentamente dell'acqua.

La *densità* di un fluido (indicata con la lettera ρ, "rho", dell'alfabeto greco) è definita come la sua massa per unità di volume e viene misurata, nel Sistema Internazionale (SI), in $\frac{Kg}{m^3}$. I diversi fluidi possono avere densità molto differenti. Però, per i liquidi, la densità varia molto poco con la pressione e la temperatura. L'acqua a 4 ^oC ha una densità pari a 1000 $\frac{Kg}{m^3}$ mentre a 100 ^oC si ha $\rho = 958\frac{Kg}{m^3}$. Invece la densità dei gas dipende fortemente sia dalla pressione che dalla temperatura.

Una grandezza spesso usata in termodinamica è il *volume specifico,* v, definito come il volume per unità di massa (e quindi come il reciproco della densità):

$$v = \frac{1}{\rho}$$

1.3 Pressione

Consideriamo un gas in quiete all'interno di un volumetto elementare $\mathcal{V}$ contenente N molecole, ovvero n molecole per unità di volume. La pressione del gas è dovuta agli urti delle molecole sulle pareti del contenitore e quindi risulterà proporzionale al numero di urti nell'unità di tempo (che dipende dal prodotto tra il numero di molecole e la loro velocità) e alla variazione di quantità di moto delle molecole. Applicando il principio della conservazione della quantità di moto alle n molecole, ciascuna assunta di uguale massa m, si può dimostrare che la pressione prodotta a causa degli urti su una parete del contenitore ortogonale all'asse x è:

$$p = n\, m\, \overline{u_x^2} \tag{1.3}$$

in cui $\overline{u_x^2}$ è la media del quadrato della componente x della velocità di agitazione termica definita da:

$$\overline{u_x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_{xi}^2$$

Considerando molecole in moto in direzione qualsiasi con velocità $\mathbf{u}_i = (u_{xi}, u_{yi}, u_{zi})$ la velocità quadratica media delle molecole è:

$$\overline{u^2} = \overline{u_x^2} + \overline{u_y^2} + \overline{u_z^2} \tag{1.4}$$

e poiché non esistono direzioni preferenziali si ha:

$$\overline{u_x^2} = \overline{u_y^2} = \overline{u_z^2} = \frac{1}{3}\overline{u^2}$$

Allora la (1.3) si scrive:

$$p = \frac{1}{3}\, n\, m\, \overline{u^2} = \frac{2}{3}\, n\, E_C = \frac{2}{3}\, \frac{N}{\mathcal{V}}\, E_C \tag{1.5}$$

in cui si è indicato con $E_C = \frac{1}{2}\, m\, \overline{u^2}$ l'energia cinetica media (dovuta alla traslazione) di una molecola.

Esprimendo il numero di molecole N come prodotto del numero di moli n_M per il numero di Avogadro N_A: $N = n_M\, N_A$, dalla (1.5) si ottiene:

$$p\, \mathcal{V} = \frac{2}{3}\, N_A\, n_M\, E_C \tag{1.6}$$

La pressione in un fluido in quiete è definita come la forza normale per unità di area che agisce su una superficie piana immersa nel fluido ed è generata dall'azione delle molecole su di essa. Nel Sistema Internazionale la pressione si misura in $\frac{N}{m^2}$, unità definita anche Pascal (Pa). La pressione nella (1.6) e nelle altre relazioni termodinamiche deve essere espressa come pressione assoluta cioè come quella il cui zero si ottiene in condizioni di vuoto assoluto. Il valore della pressione atmosferica a livello del mare è pari a 101330 Pa per convenzione internazionale. Nelle applicazioni spesso si usa misurare la pressione in riferimento a quella atmosferica locale (pressione relativa). In questo modo il valore della pressione assoluta si ottiene aggiungendo alla pressione relativa il valore di quella atmosferica.

1.4 Equazione di stato dei gas perfetti

Rispetto ai liquidi i gas sono molto comprimibili e le loro variazioni di volume sono collegate ai valori di pressione e temperatura dalla relazione:

$$p\, \mathcal{V} = n_M\, R_0\, T \tag{1.7}$$

in cui p è la pressione assoluta, T la temperatura assoluta e la costante universale $R_0 = 8314 \, \frac{J}{Kmole\, K}$. Introducendo la costante del gas R e la massa molare m_M si ha $R_0 = \ R\, m_M$ e la (1.7) si scrive:

$$p\, \mathcal{V} \ = n_M\, m_M\, R\, T \ = \ M\, R\, T \tag{1.8}$$

ovvero, tenendo conto della definizione di densità:

$$p = \rho\, R\, T \tag{1.9}$$

La (1.9) viene indicata come *equazione di stato di un gas perfetto*. Questa relazione approssima bene il comportamento di un gas reale in condizioni normali, cioè lontano dalla liquefazione.

Tenendo conto della (1.6) e della (1.7)si ha:

$$R_0\, T \ = \frac{2}{3}\, N_A\, E_C$$

Definendo la costante di Boltzmann $K_B = R_0/N_A = 1.38\, 10^{-23} \, \frac{J}{molecola^o K}$, si vede che l'energia cinetica media di una molecola è proporzionale alla sua temperatura:

$$E_C = \frac{3}{2}\, K_B\, T \tag{1.10}$$

Utilizzando la definizione di energia cinetica $E_C \ = \ \frac{1}{2} \ m \ \overline{u^2}$ e ricordando che $N_A \ m \ = \ m_M$ si ottiene l'espressione della velocità quadratica media molecolare:

$$\overline{u^2} = \frac{2\, E_C}{m} = \frac{3\, K_B\, T}{m} = 3\, R\, T \tag{1.11}$$

La (1.10) mostra che l'energia cinetica dipende solo dalla temperatura e non dal tipo di gas. Quindi molecole più pesanti o più leggere hanno la stessa energia cinetica (a pari temperatura). Queste ultime avranno allora velocità medie maggiori delle prime.

1.5 Calori specifici

La (1.4) permette di esprimere l'energia cinetica come:

$$E_C = \frac{1}{2}\, m\, \overline{u^2} = \frac{1}{2}\, m\, \overline{u_x^2} + \frac{1}{2}\, m\, \overline{u_y^2} + \frac{1}{2}\, m\, \overline{u_z^2} = \frac{3}{2}\, K_B\, T \tag{1.12}$$

avendo tenuto conto della (1.10). La (1.12) esprime il teorema di Maxwell di equipartizione dell'energia secondo cui a ciascun grado di libertà di una molecola è associato un contributo energetico pari a $\frac{1}{2}\ K_B\ T$. Quanto detto sopra vale per un gas composto da molecole monoatomiche per cui si hanno solo i 3 gradi di libertà traslazionali. Più in generale, per gas poliatomici, esistono anche i gradi di libertà rotazionali e vibrazionali. A ciascuno di essi compete ancora un contributo energetico pari a $\frac{1}{2}\ K_B\ T$.

La (1.12), scritta come $T = \frac{2}{3}\frac{E_C}{K_B}$, può essere interpretata come definizione della temperatura la quale è direttamente proporzionale all'energia cinetica media di una molecola.

1.5.1 Gas perfetto monoatomico

In questo caso si hanno soltanto i tre gradi di libertà traslazionali. Se il gas ha massa M ed è composto da N molecole l'energia cinetica media totale è $\frac{3}{2}\ N\ K_B\ T$ e coincide con *l'energia interna* E:

$$E = \frac{3}{2}\ N\ K_B\ T = \frac{3}{2}\ N\ m\ R\ T = \frac{3}{2}\ M\ R\ T \tag{1.13}$$

Per l'unità di massa l'energia interna di un gas monoatomico è:

$$e = \frac{3}{2}\ R\ T \tag{1.14}$$

Per il primo principio della termodinamica il calore scambiato per unità di massa q è legato all'energia interna dalla

$$dq = de + pd(\frac{1}{\rho})$$

Per una trasformazione a volume costante ($d\frac{1}{\rho} = 0$) il calore specifico è:

$$C_v = \left(\frac{d\ q}{d\ T}\right)_{v=cost} = \frac{d\ e}{d\ T} = \frac{3}{2}\ R \tag{1.15}$$

In questo caso si ha $C_v = cost$, cioè C_v non dipende da T, il gas viene spesso definito *più che perfetto* e l'energia interna si può esprimere come:

$$e\ =\ C_v\ T \tag{1.16}$$

Per una trasformazione a pressione costante $(dp = 0)$, esprimendo $d(\frac{p}{\rho}) = p\ d(\frac{1}{\rho}) + \frac{1}{\rho}\ dp$ e tenendo conto dell'equazione di stato dei gas perfetti:

$$dq = de + d(\frac{p}{\rho}) - \frac{1}{\rho}dp = C_v\, dT + d(R\,T) \tag{1.17}$$

da cui si ottiene:

$$C_p = \left(\frac{d\,q}{d\,T}\right)_{p=cost} = C_v + R = \frac{5}{2}\,R \tag{1.18}$$

Quindi i due calori specifici sono collegati alla costante del gas R attraverso la relazione $R = C_p - C_v$. Il rapporto γ tra i calori specifici è espresso dalla:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1.67 \tag{1.19}$$

Definendo *l'entalpia* per unità di massa come:

$$h \;=\; e \;+ \frac{p}{\rho} \tag{1.20}$$

dalla (1.17) si ha, per trasformazione a pressione costante, $dq = dh$, mentre dalla (1.18) si ricava:

$$\frac{d\,h}{d\,T} = C_p \tag{1.21}$$

e, per un gas più che perfetto:

$$h \;=\; C_p\,T$$

1.5.2 Gas perfetto biatomico

Nel caso di un gas le cui molecole siano composte da due atomi, ai tre gradi di libertà traslazionali dobbiamo aggiungerne due rotazionali (la rotazione intorno all'asse congiungente i due atomi non dà infatti contributo). In realtà ci sarebbero anche due contributi dovuti ai gradi di libertà vibrazionali i quali risultano però trascurabili per temperature inferiori a circa $1000K$. Quindi l'energia interna per unità di massa per un gas biatomico è:

$$e \;= \frac{5}{2}\,R\,T \tag{1.22}$$

Da cui, procedendo come visto al paragrafo precedente si ottiene:

$$C_v = \frac{5}{2}\,R\,, \qquad C_p = \frac{7}{2}\,R \tag{1.23}$$

mentre il rapporto tra i calori specifici è:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1.4 \tag{1.24}$$

L'aria è una miscela di gas biatomici (prevalentemente azoto e poi ossigeno) e viene bene approssimata con le relazioni riportate qui sopra.

1.6 Comprimibilità dei fluidi

Quando un gas viene compresso (od espanso) la relazione tra pressione e densità dipende dalla natura del processo. Se la compressione o l'espansione avviene a temperatura costante (processo isotermo, $T = cost.$) si ha:

$$\frac{p}{\rho} = cost. \tag{1.25}$$

Se la compressione o l'espansione avviene senza attrito e senza scambi di calore (processo isoentropico, $s = cost.$), si ha:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = cost. \tag{1.26}$$

Un'importante conseguenza della comprimibilità dei fluidi è che una perturbazione introdotta in un punto si propaga con velocità finita. Se ad esempio un fluido scorre in un tubo ed all'uscita viene improvvisamente chiusa una valvola, creando una perturbazione locale, l'effetto della chiusura non si risente immediatamente a monte. Per fare sí che l'aumento di pressione prodotto dalla chiusura della valvola si risenta in un punto a monte è necessario un certo tempo. La velocità a con cui si propaga questa perturbazione viene detta *velocità del suono*. La velocità del suono è collegata alle variazioni di pressione e di densità del fluido dall'equazione:

$$a^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{s=cost}. \tag{1.27}$$

Poiché il disturbo è piccolo e si muove rapidamente, il calore scambiato è trascurabile e quindi la velocità del suono viene valutata ad entropia (s) costante mediante le (1.27) e (1.26):

$$a = \sqrt{\frac{\gamma\, p}{\rho}} \tag{1.28}$$

e, per un gas ideale, dalla (1.9) si ottiene:

$$a = \sqrt{\gamma\, R\, T} \tag{1.29}$$

per cui la velocità del suono è proporzionale alla radice quadrata della temperatura assoluta. Per l'aria a 20 ^oC la velocità del suono è 343 m/s essendo $\gamma = 1.4, \quad R = 286.9 \frac{J}{Kg \cdot {}^oK}$. Nelle stesse condizioni la velocità del suono in acqua è 1481 m/s, quindi molto maggiore che in aria. Se il fluido fosse veramente incomprimibile si avrebbe una velocità del suono infinita.

1.7 Viscosità

La definizione della densità di un fluido non è sufficiente a caratterizzarne in modo unico il comportamento. Infatti due fluidi dalla densità quasi uguale come acqua ed olio hanno un comportamento dissimile quando sono in movimento.

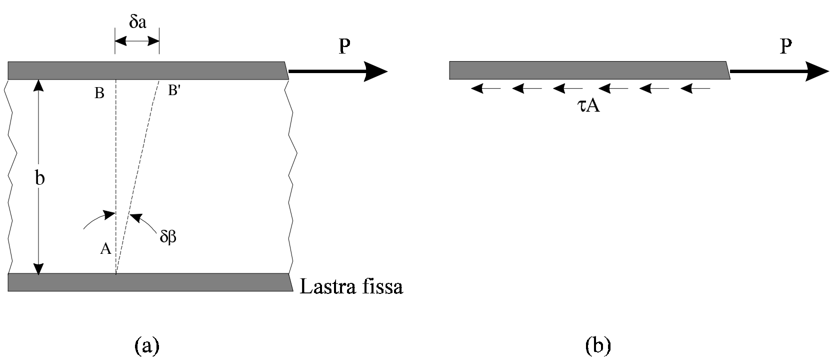

Figura 1.1: (a) Deformazione del materiale posto tra due lastre parallele. (b) Forze agenti sulla lastra superiore.

Per determinare questa ulteriore proprietà che caratterizza il moto di un fluido consideriamo un ipotetico esperimento in cui un materiale viene posto tra due lastre piane parallele come nell'esempio riportato in Fig.1.1a. La lastra inferiore è fissa mentre quella superiore è libera di muoversi. Ponendo un materiale solido, ad esempio acciaio, tre le due lastre, ed applicando la forza P, la lastra superiore si sposterà della piccola distanza δa (supponendo che il solido sia stato attaccato rigidamente alle lastre). La linea verticale AB verrà ruotata dell'angolo $\delta\beta$ nella nuova posizione AB'. Per resistere alla forza applicata P viene sviluppata, all'interfaccia lastra-materiale, una tensione di taglio τ. Per l'equilibrio si deve avere P = τA in cui A è l'area della lastra superiore (Fig.1.1b). Per solidi elastici, come è l'acciaio, il piccolo spostamento angolare $\delta\beta$, detto deformazione di taglio, è proporzionale alla tensione τ sviluppata nel materiale (la legge di Hooke è $\tau = G\ \delta\beta$ con G modulo di elasticità trasversale).

Che cosa succede nel caso in cui al posto del solido c'è un liquido come ad esempio l'acqua? La differenza principale è che, sotto l'azione della forza P, la lastra superiore si muove in modo continuo con velocità U, come illustrato in fig.1.2. Questo comportamento è consistente con la definizione di fluido, cioè di qualcosa che si deforma continuamente per effetto di una tensione di taglio. Un'analisi più dettagliata del moto del fluido rivela che il fluido a contatto con la lastra superiore si muove con la velocità U di questa, mentre quello vicino alla lastra fissa sul fondo ha una velocità nulla. Tra le due lastre il fluido si muove con velocità u = u(y) che varia linearmente, come indicato in fig. 1.2.

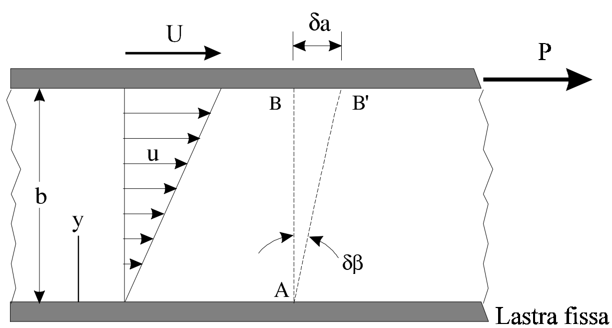

Figura 1.2: Comportamento di un fluido posto tra due piani paralleli.

In questo caso particolare il gradiente $\frac{du}{dy}$ della velocità nel fluido tra le due lastre è costante: $\frac{du}{dy} = \frac{U}{b}$. L'osservazione sperimentale per cui il fluido resta "attaccato" alle pareti rigide ha una notevole importanza nella fluidodinamica e viene di solito indicata come condizione di non scorrimento ("no-slip") o di aderenza. Tutti i fluidi, sia gas che liquidi, soddisfano questa condizione. In un piccolo intervallo di tempo δt una linea immaginaria AB nel fluido ruota di un angolo $\delta\beta$ in modo che:

$$\tan \delta\beta \approx \delta\beta = \frac{\delta a}{b} = \frac{U\delta t}{b}$$

in questo caso $\delta\beta$ dipende non solo dalla forza P (dalla quale dipende U), ma anche dal tempo. Perciò non è possibile mettere in relazione la tensione di taglio τ con l'angolo $\delta\beta$, come fatto per i solidi. Consideriamo invece la velocità con cui varia l'angolo $\delta\beta$ e definiamo la velocità di deformazione di taglio $\dot{\beta}$:

$$\dot{\beta} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\beta}{\delta t}$$

la quale, nell'esempio visto, è data da:

$$\dot{\beta} = \frac{U}{b} = \frac{du}{dy}.$$

Cosí come la tensione di taglio $\tau = \frac{P}{A}$ aumenta al crescere di P, essa è proporzionale alla velocità di deformazione di taglio $\dot{\beta}$:

$$\tau \propto \dot{\beta}$$

ovvero:

$$\tau \propto \frac{du}{dy}$$

Si ha il risultato che per i fluidi comuni come acqua, olio, gasolio, aria, ecc... la tensione di taglio e la velocità di deformazione di taglio sono collegate da una relazione, chiamata *legge dell'attrito di Newton* , che si può esprimere come:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{1.30}$$

in cui la costante di proporzionalità μ ("mi") è la *viscosità dinamica* del fluido. Il valore della viscosità dipende dal fluido considerato e varia fortemente con la temperatura. I fluidi per cui vale la (1.30) sono detti *fluidi newtoniani.* I fluidi più comuni sono di questo tipo ma alcuni fluidi importanti come sangue, vernici, polimeri, ecc... non seguono una relazione lineare tra tensione e velocità di deformazione e sono pertanto indicati come *fluidi non newtoniani.*

Dalla (1.30) si deduce che le dimensioni della viscosità sono $F \cdot T \cdot L^{-2}$. Nel Sistema Internazionale la viscosità si misura in $\frac{N \cdot s}{m^2}$.

Spesso nei problemi di fluidodinamica la viscosità appare combinata con la densità nella forma:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Questo rapporto è chiamato *viscosità cinematica* ν ("ni") e la sua unità di misura nel sistema SI è $\frac{m^2}{s}$.

Tabella 1.1: Valori caratteristici della viscosità dinamica e cinematica e della densità per alcuni fluidi.

Fluido	**Temper.** (^oC)	μ ($N\ s/m^2$)	ν (m^2/s)	ρ (kg/m^3)
acqua	20	1.0 10^{-3}	1.0 10^{-6}	1000
acqua	100	2.82 10^{-4}	2.94 10^{-7}	959
aria	15	1.79 10^{-5}	1.46 10^{-5}	1.23
aria	100	2.17 10^{-5}	2.29 10^{-5}	0.946
mercurio	20	1.57 10^{-3}	1.15 10^{-7}	13600
olio SAE 30	20	0.38	4.2 10^{-4}	912
glicerina	20	1.5	1.19 10^{-3}	1260

Nella Tabella 1.1 sono riportati i valori della viscosità (dinamica e cinematica) e della densità di alcuni fluidi caratteristici.

Si può riconoscere la notevole variazione dei valori della viscosità dei vari fluidi ed anche la forte dipendenza dalla temperatura. In particolare nei liquidi la viscosità diminuisce all'aumentare della temperatura mentre nei gas un aumento di temperatura produce un aumento di viscosità. Tale comportamento può essere interpretato in base alle considerazioni viste nei paragrafi precedenti, le quali sono state sviluppate in particolare per i gas ma che per quanto riguarda alcuni concetti, come la velocità di agitazione termica delle molecole ed il principio di equipartizione dell'energia, valgono anche per i liquidi. Quindi anche della viscosità, che rappresenta una proprietà macroscopica di un fluido, può essere data un'interpretazione a livello microscopico. Consideriamo due strati contigui nel flusso di Fig. (1.2): per effetto della velocità di agitazione termica in tutte le direzioni, alcune molecole dello strato superiore passeranno in quello inferiore e viceversa. Poichè le molecole dello strato superiore sono dotate di una maggiore velocità media, negli urti con le molecole dello strato inferiore cederanno quantità di moto allo strato inferiore, che viene quindi accelerato, mentre le molecole che dallo strato inferiore passano a quello superiore tendono a rallentare quest'ultimo. La forza scambiata fra i due strati è data dalla variazione della quantità di moto nell'unità di tempo:

$$F\ dt = M\ du = M \frac{du}{dy}\ dy \tag{1.31}$$

essendo M la massa scambiata nel tempo dt, la quale è proporzionale alla superficie di scambio A ed inversamente proporzionale alla distanza dy. Possiamo allora scrivere:

$$\frac{M}{dt} = \mu \frac{A}{dy}$$

in cui μ è una costante di proporzionalità. Sostituendo nella (1.31), la forza per unità di superficie è:

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{du}{dy} \tag{1.32}$$

e la costante di proporzionalità risulta quindi essere proprio la viscosità. Da questa interpretazione è anche evidente che all'aumentare della temperatura aumenta la velocità di agitazione termica e quindi la massa scambiata. Pertanto nei gas la viscosità aumenta all'aumentare di T.

Invece nel caso dei liquidi la viscosità decresce all'aumentare della temperatura. In essi, infatti, la forza di attrazione intermolecolare risulta molto più rilevante rispetto a quanto avviene nei gas. Al crescere della temperatura aumenta l'energia cinetica delle molecole contrastando la mutua attrazione e diminuendo il valore della viscosità.

Nell'interazione fra le molecole dei due strati oltre a scambiarsi quantità di moto viene scambiata anche energia cinetica. Si ha cioè un trasferimento di energia dagli strati a più alta temperatura (dove l'energia cinetica media delle molecole è maggiore) agli strati a bassa temperatura. E' questo il fenomeno dello scambio termico per conduzione per il quale, analogamente alla (1.32), il flusso di calore, ovvero la quantità di calore scambiata per unità di tempo e di superficie, è dato da:

$$q = -k \frac{dT}{dn} \tag{1.33}$$

essendo k il coefficiente di conduzione termica e n la normale alla superficie.

Mentre la dipendenza della viscosità dalla pressione è molto bassa, per cui viene di solito trascurata, l'effetto della temperatura sulla viscosità può essere bene approssimato mediante due formule empiriche. Per i gas si utilizza l'equazione di Sutherland:

$$\mu = \frac{C \cdot T^{\frac{3}{2}}}{T + S} \tag{1.34}$$

in cui C ed S sono delle costanti empiriche e T è la temperatura assoluta. Per i liquidi la relazione utilizzata è:

$$\mu = D \cdot e^{\frac{B}{T}} \tag{1.35}$$

con D e B costanti. La (1.35) viene spesso indicata come equazione di Andrade. Le costanti C,S e D,B possono essere calcolate se si conoscono i valori della viscosità in corrispondenza di due diversi valori della temperatura.

Nei paragrafi precedenti sono stati illustrati i modelli frequentemente utilizzati di *gas perfetto* e di *gas più che perfetto*. Un'altra schematizzazione riguarda l'ipotesi di *fluido ideale* in base alla quale nello studio del campo fluidodinamico vengono trascurati gli effetti della viscosità e della conduzione termica assumendo cioè $\mu = 0$ e $k = 0$. Più avanti nel corso si vedrà come tale ipotesi risulti di notevole utilità in aerodinamica.

1.8 Esercizi

1) Calcolare la densità dell'aria in condizioni standard (p=101,330 KPa, T=15^{o}C). [1,226 Kg/m^3]

2) Calcolare l'energia cinetica media di una molecola di gas monoatomico alla temperatura di 15^{o}C. [5,97 10^{-21} J]

3) Calcolare l'energia cinetica media di una mole di gas monoatomico alla temperatura di 15^{o}C. [3593,5 J]

4) Calcolare la velocità quadratica media di una molecola di aria alla temperatura di 15^{o}C. [248011 $(m/s)^2$]

5) Calcolare l'energia cinetica media totale di 10 grammi di aria alla temperatura di 15^{o}C. [2066,76 J]

6) Calcolare la velocità del suono in aria alla temperatura di 50^{o}C. [360,3 m/s]

7) Dell'acqua scorre tra due grandi lastre piane parallele separate da una distanza di 2 cm. Quella superiore viene trascinata con velocità 10 cm/s. Calcolare la velocità di deformazione di taglio. [5 rad/sec]

8) Nello stesso caso del problema precedente calcolare il valore della tensione tangenziale sulla lastra superiore. [5 $10^{-3} N/m^2$]